Cap.1 As leis de Newton

1.1 Mecânica Clássica

- mecânica: estudo de como as coisas se movem: planetas, esquiadores, eletrons
  . os gregos
  . a era científica: Galileu (1564-1642), Newton (1642-1727), Euler ( )

É a formulação que Euler deu às ideias de Newton que será nosso ponto de partida.

- formulações alternativas: Lagrange (1736-1813) e Hamilton (1805-1865) desenvolveram formulações equivalentes, mas que permitem soluções muito + simples para muitos problemas complicados; são também pontos de partida para vários desenvolvimentos modernos

- o termo mecânica clássica é algo vago, mas é usualmente entendido como estas 3 formulações da mecânica

- até o início do séc. XX, parecia que a mecânica clássica era o único tipo de mecânica, descrevendo corretamente todos os tipos possíveis de movimento. Entre 1905 e 1925 tornou-se claro que ela não descrevia corretamente o movimento de objetos com velocidade comparável à da luz, nem o de partículas microscópicas no interior de moléculas e átomos. Resultou o desenvolvimento de 2 formas completamente novas de mecânica: a mecânica relativística para descrever o movimento de ~~partículas~~ objetos muito velozes, e a mecânica quântica para descrever o movimento de partículas microscópicas.

Apesar da mecânica clássica ter sido substituída pelas 2 em seus domínios de validade, existe ainda um vasto domínio de problemas interessantes para os quais ela dá uma descrição completa e precisa dos movimentos possíveis. Além disso, o advento da teoria do caos nas últimas décadas fez se intensificar a pesquisa em mecânica clássica, pondo o assunto de novo "na moda".

O propósito desta disciplina é dar uma base sólida no campo da mecânica clássica. Problemas serão discutidos na formulação Newtoniana, mas tentarei também enfatizar aquelas situações nas quais a formulação Lagrangeana é mais adequada e usá-la quando for o caso. No nível desta disciplina, a abordagem Lagrangeana tem, em muitos casos, vantagens significativas sobre a Newtoniana, e mostrarei algumas destas

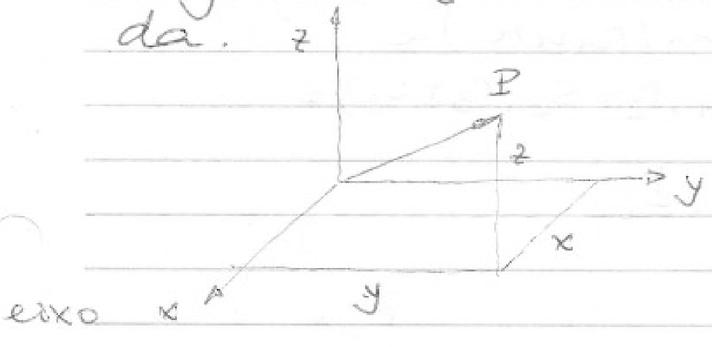
situações

1.2. Espaço e Tempo

- As 3 leis do movimento de Newton são formuladas em termos de 4 conceitos subjacentes cruciais: as noções de espaço, tempo, massa e força. Esta seção revisa brevemente a visão clássica sobre espaço e tempo, bem como manipulações com vetores, que são usados para rotular os pontos do espaço.

- O Espaço:

- Cada ponto P do espaço 3-dimensional onde vivemos pode ser rotulado (identificado) por um vetor $\vec{r}$, que especifica a distância e a direção para se alcançar P a partir de uma origem O (arbitrariamente) escolhida.



(3-ortogonal, direto: $x \to y \to z$)

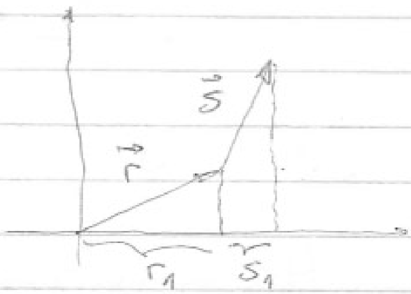
Há muitas maneiras de se identificar um vetor; uma das + naturais é dar suas componentes (x, y, z) na direção de 3 eixos ortogonais. Uma forma popular de expressar isto é introduzir 3 vetores unitários $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ ($\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$) apontando ao longo dos eixos e escrever $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

tolerante
(Você deve se tornar familiar com todas as notações alternativas)
Uma forma de abreviar isto é escrever apenas $\vec{r} = (x, y, z)$

- As componentes de um vetor são identificadas por subscritos:
$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$, por exemplo

- Quando as equações se tornam + complicadas, é útil usar o sinal de soma:
$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} r_i \hat{e}_i \qquad (\hat{e}_1 \equiv \hat{x}, \text{ etc : eixos})$$

- Operações com vetores
Se $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ e $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ são vetores, então
. sua soma (resultante) é
$$\vec{r} + \vec{s} = (r_1 + s_1, r_2 + s_2, r_3 + s_3) =$$
$$= \sum_{i=1}^{3} (r_i + s_i) \hat{e}_i$$



. se c é um escalar (número comum), então
$$c\vec{r} = (cr_1, cr_2, cr_3) = c(r_1, r_2, r_3) = \sum_{i=1}^{3} c r_i \hat{e}_i$$
$$\Downarrow$$
o vetor $c\vec{r}$ tem a mesma direção que $\vec{r}$ e o mesmo (oposto) sentido se $c > 0$ (< 0).

Juntando os 2 últimos comentários, lembre a 2ª lei:

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m = m\vec{a}$$

Há 2 tipos de produtos entre vetores a considerar:

. o produto escalar (interno):

$$\vec{r}.\vec{s} = |\vec{r}|\,|\vec{s}|\cos\theta = r s \cos\theta =$$

resultado é um escalar (número!)

$$= r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3 = \sum_i r_i s_i$$

($|\vec{r}| = r$: notação) (θ: ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{s}$)

ou: "produto do módulo de 1 dos vetores pela projeção (com sinal) do outro sobre ele"

Uso: trabalho mecânico feito por uma força $\vec{F}$ em deslocamento (infinitesimal: o que significa?) $d\vec{r}$ é $dW = \vec{F}.d\vec{r}$

Outro: $|\vec{r}| = r = \sqrt{\vec{r}.\vec{r}} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$

(Pitágoras)

Notação: $\vec{r}.\vec{r} = \vec{r}^{\,2}$

. o produto vetorial (externo)

$$\vec{p} = \vec{r} \times \vec{s} = \vec{r} \wedge \vec{s}$$

definido por:

$$\vec{p} = \vec{r} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ r_x & r_y & r_z \\ s_x & s_y & s_z \end{vmatrix} = (r_y s_z - r_z s_y)\hat{x} +$$

$$+ (r_z s_x - r_x s_z)\hat{y} + (r_x s_y - r_y s_x)\hat{z}$$

Isto implica em que $\vec{p}$ ($= \vec{r} \times \vec{s}$) é um vetor perpendicular a $\vec{r}$ e $\vec{s}$ (ao plano formado pelos 2), de módulo dado por $p = r s \operatorname{sen}\theta$ (produto do módulo de 1 pela componente transversa do outro, ou braço de alavanca) e sentido dado pela regra da mão direita.

Uso (movimento rotacional): a tendência de uma força $\vec{F}$ aplicada ao ponto $P(\vec{r})$ provocar rotação em relação a origem é medida pelo torque de $\vec{F}$ em relação a O, definido por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

- Diferenciação de vetores

Muitas leis físicas envolvem vetores, e a maioria destas envolvem derivadas de vetores. Há muitas maneiras de derivar vetores (por isso o "cálculo vetorial") e vamos rever, ao longo da disciplina, algumas delas. Por agora fiquemos com a + simples: a derivada temporal (com relação ao tempo) de um vetor que depende do tempo.

Exemplos: a velocidade $\vec{v}(t)$ de uma partícula é a derivada temporal de sua posição $\vec{r}(t)$; isto é,

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, \text{ ou } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Analogamente $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

A definição é análoga à da derivada de uma função escalar:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t},$$

onde $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$

Não vamos nos importar aqui com as questões relativas à existência destes limites (podem ser delicadas, mas vamos deixá-las para que os matemáticos tenham o que fazer) - felizmente todos os vetores que encontraremos aqui são diferenciáveis.

Como a definição é análoga, as propriedades usuais das derivadas de funções escalares são também válidas para os vetores:

- $\frac{d}{dt}(\vec{r} + \vec{s}) = \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{s}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(f\vec{r}) = f\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{df}{dt}\vec{r}$, etc

Componentes da derivada de um vetor:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}, \text{ e}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = x\underbrace{\frac{d\hat{x}}{dt}}_{=0} + \frac{dx}{dt}\hat{x} + \ldots = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z}$$

e $v_x = \frac{dx}{dt}$, etc.

Infelizmente, este resultado (tão simples) só é verdade para as componentes cartesianas (porque $\hat{\imath}$ é constante), não sendo verdade para a maioria dos sistemas de coordenadas (como o polar), porque nestes os vetores unitários não são constantes (variam com a posição, portanto com o tempo), e os resultados para as componentes da derivada são bem menos transparentes.

- O Tempo

Visão clássica: é um único parâmetro universal sobre o (valor do) qual todos os observadores concordam. Sabemos hoje que esta visão não é exatamente correta: 2 observadores em movimento relativo só concordam em suas medidas de tempo (aproximadamente) se sua velocidade relativa for desprezível frente à da luz. A única ambiguidade reside na escolha (arbitrária) do instante que chamamos $t=0$.

— 9/03/09

- Sistemas de referência (de coordenadas, referenciais)

Quase todos os problemas de mecânica envolvem a escolha (explícita ou não) de um referencial: uma origem e eixos (coordenados) para identificar pontos do espaço (rotular posições) e um instante (inicial) a partir do qual medir (intervalos de) tempo.

Uma escolha adequada do referencial pode, em alguns casos, simplificar consideravelmente a solução de um problema (ver exemplos).

Uma diferença importante entre referenciais surge quando eles têm movimento relativo. Veremos que nem todos estes são fisicamente equivalentes. Em alguns referenciais especiais, chamados inerciais, as leis de Newton são verdadeiras em sua forma + simples. Se um referencial está acelerando ou girando em relação a outro inercial, então êle é não-inercial e as leis de Newton não são verdadeiras em sua forma usual. A distinção entre referenciais inerciais e não inerciais terá um papel importante em nossa discussão e terá um papel ainda + explícito na teoria da relatividade.

1.3 Massa e Força

Não vou gastar muito tempo na

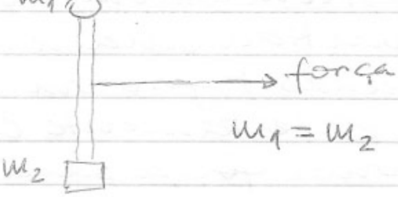
discussão destes conceitos básicos (mas os filósofos e historiadores da ciência não se cansam de fazê-lo...). Suponho que a ideia que vocês tratem de ~~seus~~ seus cursos básicos seja suficiente para nós, e vou apenas descrever como estas noções são definidas e como são medidas em muitas situações realistas.

Massa

A massa de um objeto quantifica sua inércia - sua "resistência" a ser acelerado. Uma rocha grande é difícil de acelerar, e sua massa é grande. É fácil acelerar uma pedrinha, e sua massa é pequena. Para tornar quantitativas estas ideias naturais precisamos definir uma unidade de massa e enunciar uma prescrição (um procedimento) para medir a massa de um objeto qualquer em termos da unidade escolhida.

A unidade internacional de massa é o kilograma: massa de um bastão de platina-irídio guardada no Bureau Internacional de Pesos e Medidas (Sèvres, perto de Paris).

Uma maneira com a qual podemos, pelo menos em princípio, comparar massas é com o uso da balança inercial:



$m_1 = m_2 \iff$ bastão não gira

A beleza da balança inercial é que é um método de comparar massas baseado diretamente na noção de massa como resistência à aceleração. É, no entanto, pouco prática, e, felizmente, há maneiras muito + simples de fazer esta comparação. A + simples é por comparação de pesos: o peso de um objeto é exatamente proporcional a sua massa - contanto que todas as medidas sejam feitas no mesmo local (êrro de 1 parte em 10^{12}!) - balança gravitacional.

Esquema para medir massas arbitrárias:

- use a massa unitária e uma balança (inercial ou gravitacional) para construir um grande número de kilogramas padrão;
- construa múltiplos e submúltiplos
- meça massa de objeto arbitrário equilibrando-a com massas conhecidas.

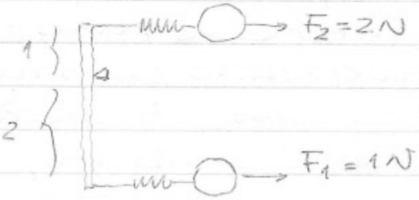
. Força

A noção intuitiva (puxão ou empurrão) é (surpreendentemente!) um bom ponto de partida para construir esta noção. Quando seguro um saco de cimento fico perfeitamente consciente de exercer uma força para cima; quando empurro uma caixa pesada sobre o chão, percebo claramente que preciso exercer uma força horizontal na direção (e sentido) do movimento.

Forças exercidas por objetos inanimados trazem alguma dificuldade adicional e é preciso entender alguma coisa sobre as leis de Newton para identificá-las corretamente. Se eu largo o saco de cimento, ele acelera em direção ao chão; concluo, portanto, que deve haver uma força - seu peso, o puxão gravitacional exercido pela Terra - puxando-o para baixo. Enquanto empurro a caixa sobre o chão, observo que ela não acelera e concluo que deve haver outra força - o atrito (cinético) - agindo no sentido contrário à minha.

Uma das competências + importantes ~~para~~ que um estudante de mecânica elementar deve aprender é a de examinar o ambiente onde se situa o objeto de interesse e identificar todas as forças que ele sofre. Que "coisas" o tocam e podem, portanto, exercer forças de contato, tais como o atrito ou aquelas derivadas da pressão atmosférica? E quais são os objetos próximos capazes de exercer forças de ação à distância, tais como o puxão gravitacional da Terra e a força eletrostática devida a um objeto eletricamente carregado?

Se aceitarmos que sabemos como identificar forças, resta-nos decidir como medi-las. Adotamos como unidade o newton (N), definido como o módulo de uma força que, sozinha, acelera de $1 m/s^2$ o kilograma padrão. Com esta definição, podemos calibrar uma balança de mola (dinamômetro). Com um braço de balança podemos definir múltiplos e frações do newton.



Para definir a direção (e sentido) aplicamos a força $\vec{F}$ sozinha a um objeto em repouso e observamos a direção e sentido da aceleração que resulta.

1.4 Primeira e segunda leis de Newton; Referenciais inerciais

Discutirei estas leis na forma como se aplicam a uma massa puntiforme (sem dimensão) - uma partícula é uma ficção conveniente, um objeto com massa e sem tamanho, que pode se mover no espaço mas não tem graus de liberdade internos. Pode ter energia cinética de translação, mas não de rotações, vibrações ou deformações internas. Neste contexto, as leis de Newton ficam + simples; mais tarde construirei a mecânica de corpos extensos considerando-os como uma coleção de (muitas) partículas.

Apesar de ficcional, o modelo de partícula encontra aplicações em muitos problemas importantes, nos quais o objeto de interesse pode ser realisticamente aproximado por um ponto material (exemplos). A mecânica da partícula não é, portanto, apenas o ponto de partida para a de corpos extensos: é um assunto com ampla aplicação em si mesmo.

A formulação das leis de Newton que usarei é a seguinte:

Definição: um referencial inercial é aquele no qual uma partícula livre (da ação de forças) se move com velocidade $\vec{v}$ constante ($\vec{a} = 0$)

1ª lei: Existe na natureza um referencial inercial, com a precisão tão grande quanto se queira.

2ª lei: Em um referencial inercial, se $\vec{F}$ é a resultante das forças que atuam sobre uma partícula de massa m e $\vec{p} = m\vec{v}$ é seu momento linear, então

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Lembro: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ (notação ponto)

Se a massa da partícula não varia,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$$

Estas formas, equivalentes na mecânica clássica, não o são na relativística.

Corolário da 1ª e 2ª leis: Existe uma infinidade de referenciais inerciais; ou: se S é um referencial inercial, todo referencial S' que se mova com velocidade $\vec{V}$ constante em relação a S é também inercial.

Referenciais S'' que sejam acelerados ou que girem em relação a S não são inerciais.

É uma aproximação excelente para um grande número de situações (problemas) físicas considerar a superfície da Terra como suporte de um referencial inercial - uma circunstância muito favorável aos estudantes de Física. No entanto, este é um referencial intrinsecamente não-inercial (translação acelerada em relação ao centro da galáxia + rotação em torno de seu eixo). Estes efeitos não-inerciais são, em geral, pequenos o suficiente para ser ignorados, mas há notáveis e importantes exceções, por exemplo as marés oceânicas e a trajetória de projéteis de longo alcance, além do emblemático pêndulo de Foucault.

As 2 primeiras leis de Newton, na forma enunciada, são universalmente válidas nos domínios clássico e relativístico - mas não no quântico. Você pode, se quiser, enxergar esta hipótese como a definição de um modelo - o modelo clássico - para o mundo natural. Ele é logicamente consistente e é uma representação tão boa para uma enorme variedade de fenômenos que se justifica estudá-lo.

Equações diferenciais

Escrita na forma $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$, a 2ª lei propõe uma eq. diferencial para a (função) posição da partícula $\vec{r}(t)$ - isto é, uma eq. que envolve derivadas da função procurada. Quase todas as leis da Física são, ou podem ser, escritas como eq. diferenciais, e uma grande parte do tempo de muitos físicos é gasta resolvendo este tipo de equação. Em particular, a maioria dos problemas que vamos resolver nesta disciplina envolvem eq. diferenciais, quer através da 2ª lei, quer através da formulação Lagrangeana.

Estas eq. variam muito em grau de dificuldade. Algumas são tão fáceis que as resolvemos sem sequer percebê-lo. Por exemplo, considere uma partícula confinada a se mover sobre o eixo x e sujeita à ação de uma força ($\parallel$ a x) constante F_o. A 2ª lei: $\ddot{x}(t) = \frac{F_o}{m}$

Esta é uma eq. dif. de 2ª ordem para $x(t)$ (porque envolve derivada de 2ª ordem, mas não de ordem superior). Para resolvê-la, basta integrar 2 vezes.

$$\int_{v_0}^{v(t)} \ddot{x}(t')\,dt' = \int_0^t \frac{F_0}{m}\,dt'$$

$$\Downarrow$$

$$v(t) - v_0 = \frac{F_0}{m} t \implies \dot{x}(t) = v_0 + \frac{F_0}{m} t$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \dot{x}(t')\,dt' = \int_0^t \left[v_0 + \frac{F_0}{m} t' \right] dt'$$

$$x(t) - x_0 = v_0 t + \frac{F_0}{2m} t^2$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{F_0}{2m} t^2$$

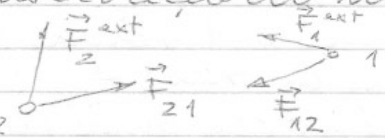
1.5 A 3ª lei de Newton e a conservação do momento.

A 2ª lei de Newton e a def. de ref. inercial se ocupam de como um objeto se comporta (responde) quando está sob a ação de forças. A 3ª focaliza algo completamente diferente. Toda força na natureza é realizada por um agente e sofrida por outro, e está sempre acompanhada por uma força (outra!) que o 2º faz sobre o 1º. Este fato parece bastante natural e não é difícil conectá-lo com nossa experiência sensorial imediata. Mas a 3ª lei vai + além: estas 2 forças (do par) são sempre iguais (em módulo) e contrárias (em sentido).

3ª lei: Se o objeto 1 faz a força $\vec{F}_{21}$ sobre o objeto 2, este último fará sobre o primeiro uma força $\vec{F}_{12}$ tal que $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Se, além disso, estas forças agem na direção da linha que une 1 e 2 (são centrais), dizemos que obedecem à 3ª lei na forma forte (elas são as + comuns).

A 3ª lei está intimamente ligada à conservação do momento linear.



Da 2ª lei:

$$\dot{\vec{p}}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_1^{ext} \quad e \quad \dot{\vec{p}}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_2^{ext}$$

Definimos o momento linear total do sistema formado por 1 e 2:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad ; \text{ então,}$$

$$\dot{\vec{P}} = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_2^{ext}$$

$$= \vec{F}_{ext} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}$$

$\Rightarrow$ as forças internas ao sistema não afetam o momento total; além disso, se $\vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{P}$ é constante resultado chamado de o princípio (teorema) da conservação do momento linear.

Sistemas com muitas partículas

A extensão do resultado anterior para estes sistemas é simples, mas vou fazê-la por extenso para introduzir uma notação útil e para ganharmos + intimidade com a notação de soma.

Considere um sistema de N partículas, rotuladas por um índice em grego α ou β, que podem tomar quaisquer valores entre 1 e N, de massas m_α e momentos $\vec{p}_\alpha$. Sobre cada uma agem N-1 forças (internas) devidas às outras, $\vec{F}_{\alpha\beta}$ (força de β sobre α), além de uma força externa (resultante) $\vec{F}_\alpha^{ext}$. A força resultante sobre a partícula α é

$$\vec{F}_\alpha = \sum_{\beta\neq\alpha}{}' \vec{F}_{\alpha\beta} + \vec{F}_\alpha^{ext}$$

2ª lei: $$\dot{\vec{p}}_\alpha = \sum_{\beta\neq\alpha}{}' \vec{F}_{\alpha\beta} + \vec{F}_\alpha^{ext}$$

O momento total do sistema é

$$\vec{P} = \sum_\alpha{}' \vec{p}_\alpha \quad ; \text{ logo,}$$

$$\dot{\vec{P}} = \sum_\alpha{}' \sum_{\beta\neq\alpha}{}' \vec{F}_{\alpha\beta} + \underbrace{\sum_\alpha{}' \vec{F}_\alpha^{ext}}_{\vec{F}^{ext}}$$

Mas $\sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta > \alpha} (\vec{F}_{\alpha\beta} + \vec{F}_{\beta\alpha}) = 0$

$\Rightarrow \quad \dot{\vec{P}} = \vec{F}^{ext}$

Conservação do momento linear: se $\vec{F}^{ext} = 0$, $\vec{P}$ é constante (válido em mec. clássica e relativística).

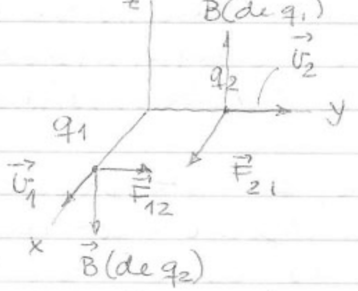
Convença-se de que, se este princípio é verdadeiro para qualquer sistema de muitas partículas, então a 3ª lei tem que ser verdadeira.

Validade da 3ª lei

No domínio da física clássica, a 3ª lei é válida com tanta precisão que pode ser tomada como exata. No entanto, é fácil ver que ela não pode ser verdadeira quando as velocidades se aproximam à da luz. O motivo é que ela afirma a igualdade das forças do par $\vec{F}_{12}(t)$ e $-\vec{F}_{21}(t)$ quando medidas no mesmo instante $\underline{t}$. Portanto, no domínio relativístico se $\vec{F}_{12}(t) = -\vec{F}_{21}(t)$ para 1 observador, isto não será verdade, em geral, para outro em movimento com relação ao primeiro (já que eventos simultâneos para 1 observador não o serão, em geral, para outro qualquer).

Mas não é só neste caso que a 3ª lei

falha. Existe um exemplo simples de uma força bem conhecida – a força magnética entre 2 cargas em movimento – onde ela não é válida



Nestes caso, o momento linear não se restringe à parte "mecânica"; campos EM também portam momento, e, na situação descrita, o momento total permanece conservado se levarmos em conta esta última parcela

Não precisamos, todavia, nos preocupar aqui com casos como este, já que a perda de momento mecânico é completamente desprezível se as velocidades envolvidas forem muito inferiores à da luz (a força magnética é da ordem de $\frac{v^2}{c^2}$ da força eletrostática coulombiana)

— 11/03/09

1.6 A 2^a lei em coordenadas cartesianas

2^a lei: equação de movimento

O problema (mecânico) típico: conhecemos as forças e queremos obter $\vec r(t)$ através da solução de $\vec F = m\ddot{\vec r}$

Esta é uma eq. dif. vetorial. A maneira + simples de resolver uma eq. como esta é (quase) sempre exprimir os vetores envolvidos em termos de suas componentes relativos a um sistema de coordenadas adequadamente escolhido.

O + simples destes é o Cartesiano (ou retangular), com vetores unitários (versores) $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$:

$$\vec{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z} \quad e$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}, \quad e$$

$$F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z} = m\ddot{x}\hat{x} + m\ddot{y}\hat{y} + m\ddot{z}\hat{z}$$

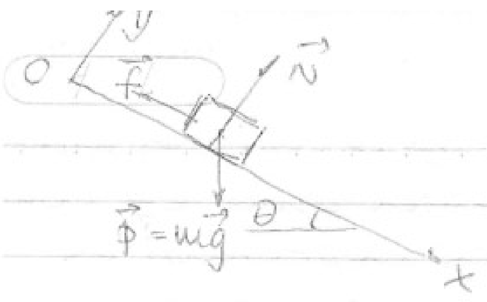
$$\Downarrow$$

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \iff \begin{cases} F_x = m\ddot{x} \\ F_y = m\ddot{y} \\ F_z = m\ddot{z} \end{cases}$$

Exemplo 1: bloco deslizando numa rampa

Observamos um bloco que acelera para baixo a partir do repouso, deslizando sobre uma rampa de coef. atrito cinético μ e inclinada de θ em relação à horizontal. Que distância terá percorrido depois de um (intervalo de) tempo t?

(a) escolha de sistema de coordenadas



Vantagens da escolha:

(i) movimento apenas em x

(ii) forças desconhecidas ($\vec{f}$ e $\vec{N}$) só têm 1 componente $\neq 0$

Analisemos as 3 componentes separadamente:

$z: \quad F_z = 0 \Rightarrow \ddot{z} = 0 \rightarrow \dot{z}\ (= v_z)$ é constante

$\Rightarrow \dot{z} = 0 \Rightarrow z(t) = 0$

y: bloco não pula $\Rightarrow \ddot{y} = 0 \Rightarrow F_y = 0$

$\Downarrow \qquad (\Rightarrow \dot{y} = 0 \Rightarrow y = 0)$

$$F_y = N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

$\Downarrow$

$$f_{(cin)} = \mu N = \mu mg\cos\theta$$

$x: \quad p_x - f = m\ddot{x}$

$$mg\,\mathrm{sen}\,\theta - \mu mg\cos\theta = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = g(\mathrm{sen}\,\theta - \mu\cos\theta)$$

$$\int_0^t \Rightarrow \dot{x} = g(\mathrm{sen}\,\theta - \mu\cos\theta)t \qquad (\dot{x}(0) = 0)$$

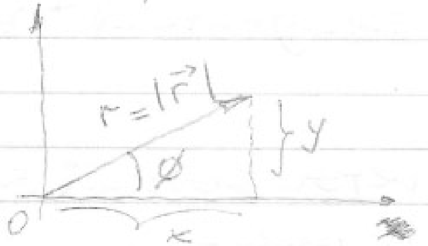
$$\int_0^t \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}g(\mathrm{sen}\,\theta - \mu\cos\theta)t^2$$

$(x(0) = 0)$

MG1.25

1.7 Coordenadas polares (em 2D)

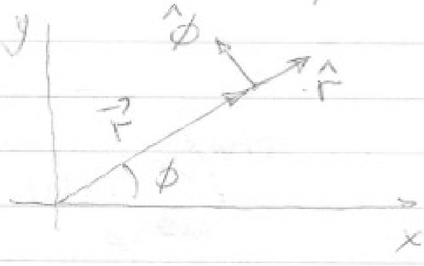
Apesar da simplicidade das coord. cartesianas, precisamos lidar com outras: há problemas quase impossíveis de resolver sem elas. Consideremos a forma que toma a 2ª lei em problemas 2-dimensionais usando coordenadas polares.



$x = r\cos\theta$ $\quad$ $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$y = r\,\text{sen}\,\theta$ $\quad$ $\phi = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

Introduzimos os unitários $\hat{r}$ e $\hat{\phi}$. Para melhor compreender suas definições, note que $\hat{x}$ é o vetor unitário que aponta na direção de x crescente (com y fixo)



Os versores $\hat{x}$ e $\hat{y}$ são, portanto, os mesmos em todos os pontos do plano, mas o mesmo não acontece com $\hat{r}$ e $\hat{\phi}$ - e é isto que complica o uso da 2ª lei em coordenadas polares.

Outra forma de escrever $\hat{r}$:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{r},$$

o que sugere outro papel para a notação "chapéu" ($\hat{}$): qqs o vetor $\vec{a}$, $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ é o vetor unitário em sua direção

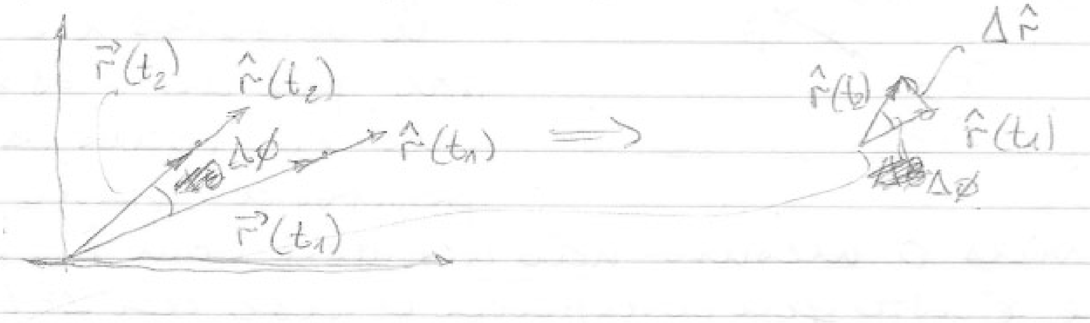
$\hat{r}$ e $\hat{\phi}$ são linearmente independentes (ortogonais) $\Rightarrow$ qualquer vetor do R^2 pode ser escrito em termos deles:

$$\vec{F} = F_r \hat{r} + F_\phi \hat{\phi}$$

Exemplo: pedra girando na ponta de barbante $\rightarrow$ F_r é a tensão do barbante, F_ϕ a força de resistência do ar (arrasto) na direção tangente à trajetória.

logo depois da figura anterior [$\vec{r} = r\hat{r}$ (vetor posição só tem componente radial)]

Para escrever a 2ª lei em coordenadas polares precisamos derivar (2 vezes) a última expressão $\Rightarrow$ precisamos saber quem é $\dot{\hat{r}}$ (e $\dot{\hat{\phi}}$!)



$$\Delta\hat{r} \simeq (|\hat{r}|.\Delta\phi)\,\hat{\phi} = \Delta\phi\,\hat{\phi} = \dot{\phi}\,\Delta t\,\hat{\phi}$$

$$\dot{\hat{r}} = \frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\phi}\,\hat{\phi}$$

ou: $\hat{r}(t) = \cos\phi\,\hat{x} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{y}$

$\dot{\hat{r}}(t) = -\operatorname{sen}\phi\,\hat{x}\,\dot{\phi} + \cos\phi\,\hat{y}\,\dot{\phi} = \dot{\phi}\,\hat{\phi}$

Logo, $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$

$$\Rightarrow \quad v_r = \dot{r}$$
$$v_\phi = r\dot{\phi} = r\omega$$

Analogamente, $\dfrac{d\hat{\phi}}{dt} = -\dot{\phi}\hat{r}$, e

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}\right) =$$
$$= \left(\ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi}\right) + \left(\dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\ddot{\phi}\hat{\phi} - r\dot{\phi}^2\hat{r}\right)$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\right)\hat{\phi}$$

Caso particular: r é constante

$$\Downarrow$$

$$\vec{a} = -r\dot{\phi}^2\hat{r} + r\ddot{\phi}\hat{\phi}, \text{ ou}$$
$$= \underbrace{-r\omega^2\hat{r}}_{a_r} + \underbrace{r\alpha\hat{\phi}}_{a_\phi}$$

centrípeta $\leftarrow a_r$ $\qquad$ $a_\phi \rightarrow$ tangencial

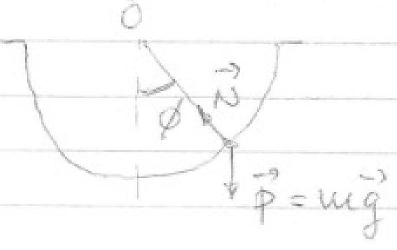
O termo $2\dot{r}\dot{\phi}\hat{\phi}$ é chamado aceleração de Coriolis e é o + difícil de entender

A 2ª lei, em componentes polares, fica então:

$$\begin{cases} F_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right) \\ F_\phi = m\left(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\right) \end{cases}$$

Uma das razões principais para reescrever a mecânica clássica na formulação Lagrangeana é simplificar o trabalho com coordenadas não cartesianas

Exemplo 2: o skate oscilatório



half-pipe com raio $R = 5m$

skate sem atrito abandonado do repouso; discuta o movimento subsequente - quanto tempo leva para voltar ao ponto de partida?

Com a escolha de coordenadas feita, $r(t) = R$ (constante) $\Rightarrow$ resta-nos achar $\phi(t)$. Neste caso, tudo fica + simples:

$$F_r = -mR\dot{\phi}^2$$
$$F_\phi = mR\ddot{\phi}$$

Mas

$F_r = mg\cos\phi - N$, $F_\phi = -mg\,\mathrm{sen}\,\phi$, só precisamos da 2ª equação:

$$-mg\,\mathrm{sen}\,\phi = mR\ddot{\phi}$$
$$\ddot{\phi} + \frac{g}{R}\,\mathrm{sen}\,\phi = 0$$

Análise qualitativa

(i) $\phi = 0 \Rightarrow \ddot{\phi} = 0$ (repouso) (equilíbrio)

(ii) $\phi > 0$ (lado direito) $\Rightarrow \ddot{\phi} < 0$ e aceleração é para a esquerda

(se $\dot{\phi} > 0$, skate se move cada vez + lentamente)

(se $\dot{\phi} < 0$, idem, + rapidamente)

(iii) idem, $\phi < 0$

$\Rightarrow$ movimento oscilatório

A eq. movimento não pode ser resolvida em termos de funções elementares (a sol. é uma função elíptica de Jacobi). Pode ser resolvida numericamente (com um computador)

Aproximação de pequenas oscilações:

ϕ_0 "pequeno" $\Rightarrow \operatorname{sen}\phi \simeq \phi$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{R}\phi = 0 \qquad \omega^2 = \frac{g}{R}$$

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \phi = 0$$

É fácil encontrar 2 soluções linearmente independentes ($\cos \omega t$ e $\operatorname{sen}\omega t$). A solução geral é

$$\phi(t) = A \operatorname{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

(2 constantes para 2 integrações)
(Espaço de soluções é 2-dimensional)
(Em geral, sol. geral de eq. dif. de 2ª ordem é família com 2 constantes independentes)

Impondo condições iniciais:

$\phi(t=0) = B = \phi_0$

$\dot{\phi}(t=0) = A\omega = 0 \Rightarrow A = 0$

$$\Downarrow$$

$$\phi(t) = \phi_0 \cos(\omega t)$$ (gráfico $\phi \times t$)

O período é τ:

$$\omega\tau = 2\pi \Rightarrow \tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Se $R = 5m$, $g = 9{,}8\ m/s^2 \Rightarrow \tau = 4{,}5\ s$